

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_2 = 2$ și $b_4 = 4$. Determinați b_6 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y = 3x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.
- 5p 4. Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
- 5p 5. Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$.
- 5p 6. Demonstrați că, în orice triunghi ABC , are loc relația $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(X(0,1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Demonstrați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$.
- 5p a) Arătați că $5 * 10 = 17$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x = x * x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

- 5p** c) Arătați că, pentru orice numere reale a și b , cu $a < b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$, pentru orice primitivă F a funcției f .